

---

# Analyse exploratoire de l'influence des normes sur la localisation des centres dans un espace géométrique continu et isotrope

**Didier Josselin**

UMR ESPACE, 6012, CNRS, Université de Franche Comté et des Pays de Vaucluse  
14, rue Louis Pasteur, 84000 Avignon  
didier.josselin@univ-avignon.fr

---

*RÉSUMÉ.* Lors de la recherche des centres dans l'espace géométrique, on a coutume d'utiliser, pour affecter les ressources aux demandes, des normes en tant que distances entre le centre et les points de demande (Euclidiennes, rectilinéaires) ou comme fonction d'objectif (minimisation des distances simples, des distances au carré ou des distances maximales). A chacune de ces logiques (efficacité, équité...) peuvent correspondre des centres particuliers ( $p$ -centre,  $p$ -médiane, barycentre, etc.) dont la localisation peut être largement variable d'un centre à l'autre. Notre proposition est ici d'explorer et de discuter la relation entre les normes et les centres géographiques, à la lumière d'exemples concrets et simulés.

*ABSTRACT.* This paper deals with a specific case of  $P$ -location-allocation problem and its relation with  $L_p$  norms which are chosen to design an optimal center serving a set of points. Equity, equality and efficiency can be some objectives to locate centres accurately such as gravity centers, 1-median or 1-center, for instance. We present the context of that research, explain the method used for obviously finding different centres and apply it on some theoretical and simulated data.

*MOTS-CLÉS :* normes  $L_p$ ,  $P$ -location-allocation, valeurs centrales, centres géographiques,  $P$ -médiane,  $P$ -centre, optimisation spatiale

*KEYWORDS:*  $L_p$  norms,  $P$ -location-allocation, centres,  $P$ -median,  $P$ -center, spatial optimization

---

## 1. Introduction

L'organisation de l'espace géographique dans lequel nous insérons nos activités et nos mobilités est le reflet d'une utilisation passée et présente, plus ou moins rationnelle et efficace, des ressources disponibles. Il existe en effet des aménités qui procurent à un ensemble d'individus ou de lieux des facilités dans leur cadre de vie. Que l'on parle d'école, d'hôpital, de gare ou de site de traitement des déchets, il s'agit généralement de découper le territoire de telle façon que le bassin de chalandise du lieu d'intérêt en question permette de servir une population dont l'éloignement sera une variable déterminante, voire discriminante de l'utilisation de la ressource.

Le problème présente une double facette : il faut localiser la ressource (facilité), puis allouer celle-ci à la population (ou demande). On parle ainsi du problème général de localisation-allocation (ou location-allocation). On voit aussi poindre dans la définition du problème la prégnance de la (minimisation de la) distance, qui détermine la localisation de la ressource elle-même, devant servir la population (ménages) et ses activités (entreprises), et la stratégie de cette population dans sa propre localisation, près des réseaux, des zones d'activités, des centres urbains.

Le présent article propose une analyse exploratoire de l'influence des normes sur la localisation des centres dans un espace géométrique continu et isotrope. En effet, dans les projets d'aménagement, on a souvent tendance à minimiser l'impact de la méthode de localisation de la ressource sur les modalités d'accès à celle-ci, tout en prônant une logique particulière (économique, sociale...). Le choix de localisation d'un centre (lieu de la ressource), acte politique, reste largement tributaire d'une méthode de localisation « optimale » qui pourrait être employée sans discernement.

A un premier niveau géométrique, notre recherche pose le problème de l'adéquation de la méthode utilisée (à travers le choix de normes mathématiques) à l'objectif poursuivi (efficacité, équité). Elle tente d'analyser le poids des individus, en fonction de leurs localisations respectives, sur la localisation du centre. Il ne s'agit pas ici de trouver une solution de localisation optimale dans l'absolu et dans l'espace géographique, mais seulement de rappeler l'impact du choix des normes, dans une approche épurée géométrique. Sans considération particulière concrète sur l'aménagement, notre propos sera davantage une discussion méthodologique autour de la sémantique des normes pour les enjeux de localisation d'un centre.

Nous introduisons l'article avec un exemple frappant et énigmatique, avec des villes du sud de la France, puis rappelons la définition de la distance de Minkowski et des principales normes utilisées. Dans la section suivante, nous replaçons nos travaux dans le domaine de la  $P$ -localisation-allocation et analysons la façon dont les normes agissent sur la répartition des poids des individus dans la localisation des centres. Dans la dernière section, nous présentons les modes de calcul de quelques centres géométriques exacts et leur relation avec les normes, un algorithme générique d'estimation d'autres centres par descente de gradient, ainsi que quelques

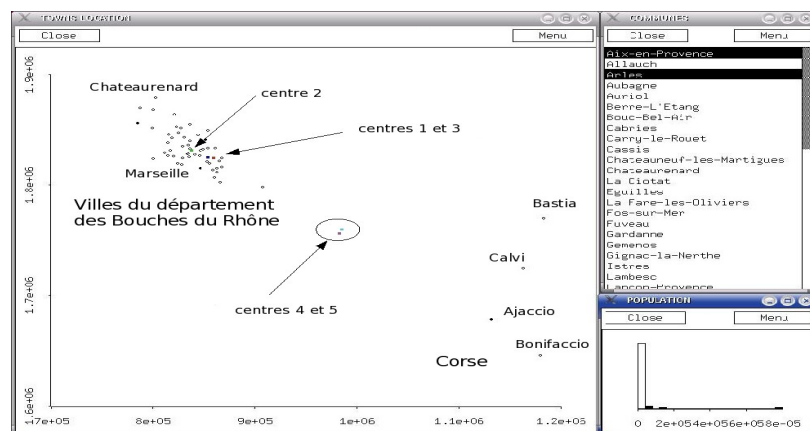
exemples de configurations de points de demande typiques, instructifs quant à la localisation des différents centres. Nous concluons sur une discussion théorique sur l'utilité de ces concepts en géographie et en aménagement du territoire.

## 2. Les normes $L_p$ dans la localisation des centres : exemple et définition

### 2.1. Centres géométriques des principales villes des Bouches du Rhône et de Corse

L'exemple décrit ici se veut didactique et permet d'introduire le problème. Il ne présage pas d'un quelconque aménagement de centre optimal. L'espace géométrique est considéré comme isotrope et continu, même si en arrière plan, on peut calquer l'espace géographique correspondant. Nous représentons 5 centres, sans expliciter encore leur construction. Ces centres sont tous censés servir, chacun à leur façon, les principales villes du département des Bouches du Rhône et de Corse. Cet exemple est typique car nous disposons de quatre villes corses éloignées du reste des villes continentales séparées par la mer (Calvi, Bonifaccio, Ajaccio et Bastia).

Dans la figure 1, aucune ville n'a de poids particulier (chaque occurrence définit un point). La figure 2 montre les mêmes centres, mais cette fois-ci leur localisation a été pondérée par la population des villes considérées.



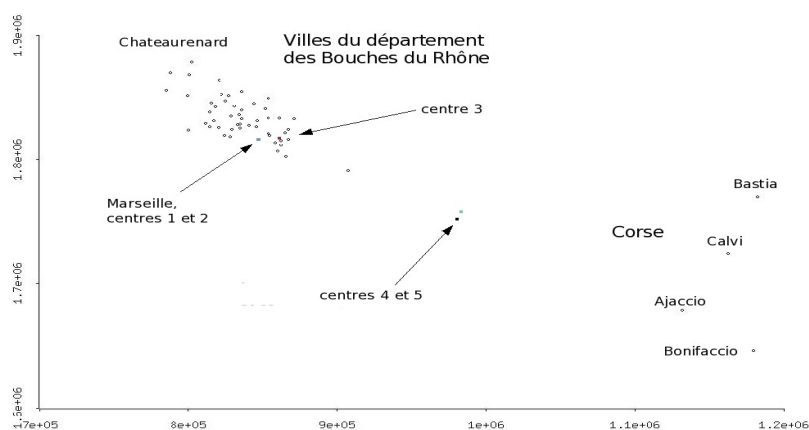
**Figure 1.** Localisation de 5 centres servant les principales villes des Bouches du Rhône et de Corse (chaque ville pèse pour 1 simple individu)

On constate, sur les deux figures 1 et 2, la disparité spatiale des centres; deux d'entre eux se trouvant dans la mer (!), les autres se situant dans le paquet de villes des Bouches du Rhône. Ces deux groupes de centres sont très éloignés, même lorsque le calcul des centres se réalise avec une pondération des villes en fonction de

leur population. Nous verrons par la suite qu'ils correspondent en effet à des logiques différentes, faisant peser plus ou moins les 4 villes de Corse dans leur localisation.

Si l'on compare maintenant les deux figures 1 et 2, on constate que les centres 4 et 5 sont restés en pleine mer, que le centre 3 s'est rapproché des villes de population importante (dont Marseille), pendant que les centres 1 et 2 ont fusionné avec la capitale marseillaise. Ces comportements vont être élucidés par la suite.

Cet exemple montre la variété des solutions de localisation optimale et cadre le propos de l'article dans une réflexion théorique sur un espace géométrique. Les travaux présentés ici mettent en effet l'accent sur les normes mathématiques employées pour déterminer les centres. A ce niveau de réflexion, vouloir considérer des informations environnementales ou territoriales pour l'aménagement rendrait délicate l'analyse de l'impact de la distance de Minkowski choisie sur la localisation.



**Figure 16.** Localisation de 5 centres servant les principales villes des Bouches du Rhône et de Corse (chaque ville pèse proportionnellement à sa population).

## 2.2. Normes $L_p$ ou distance de Minkowski

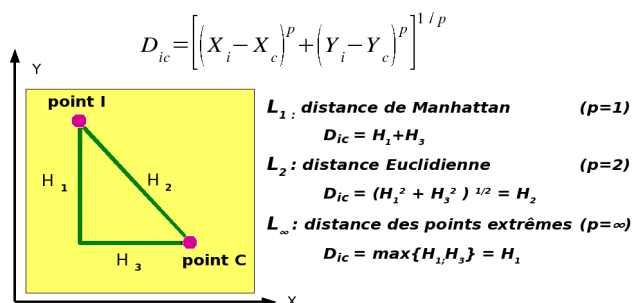
La localisation des facilités requiert, dans notre cadre d'analyse, le recours aux normes. D'une part, la norme  $L_p^1$  (distance de Minkowski<sup>2</sup>) définit le type de distance considérée pour mesurer l'écart d'un individu à la valeur centrale (rectilinéaire, euclidienne...). D'autre part, la norme peut aussi intervenir au niveau de la manière dont la fonction d'objectif, visant à déterminer les coordonnées du centre, va combiner les distances pour l'ensemble des points de demande.

<sup>1</sup>nous indiquerons un petit  $p$  pour la valeur de la norme  $L_p$

<sup>2</sup>La norme  $L_p$  est définie par  $\left[\sum |z_i|^p\right]^{1/p}$  avec  $p > 0$  et  $p = 1, 2$  ou  $\infty$  selon les normes

Le premier niveau d'intervention de la norme est la distance que l'on considère pour mesurer les écarts entre les points dans le plan. On pourrait même imaginer à ce niveau utiliser autre chose que des métriques, comme par exemple des distances réseaux (Labbe *et al.* 1995, Peeters & Thomas 1997, Peeters & Thomas, 2000).

Si nous restons dans le cas des métriques correspondant au problème posé dans cet article, nous disposons déjà de plusieurs distances possibles (fig. 3) associées aux normes  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_\infty$  et les valeurs centrales les minimisant, respectivement la médiane, la moyenne et le centre des points extrêmes. D'autres méthodes complémentaires aux valeurs centrales usuelles (Feldman *et al.*, 1991) existent (Hoaglin *et al.*, 1983, Andrew *et al.*, 1972). Le cadre de la norme  $L_p$  est suffisamment englobant et formalisé pour être utilisé afin d'en explorer les propriétés.



**Figure 3.** Représentation graphique des normes  $L_1$  (distance de Manhattan ou rectilinéaire),  $L_2$  (distance Euclidienne) et  $L_\infty$  (distance des points extrêmes) et façon de les minimiser ( $D_{ic}$ ) pour un point de demande  $i$  et un centre  $c$ .

### 2.3. Sémantique des centres associés aux normes

Les normes  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_\infty$ , couramment appliquées, définissent des approches spatiales en faveur soit de l'équité, de l'efficacité (Beguïn, 1989) ou de l'égalité. Dans l'analyse de l'accessibilité aux transports ou pour les problèmes d'allocation de ressources, on utilise des normes connues et facilement calculables pour d'obtenir des solutions exactes, correspondant à des « philosophies » d'accès aux ressources. Ainsi, la norme  $L_1$  modélise un objectif d'efficacité, la norme  $L_\infty$  un objectif d'équité.

L'efficacité sous-entend généralement une approche de type économique visant à maximiser les profits ou à minimiser les coûts. Elle est considérée dans un système global, parfois au détriment d'individus. Un service de transport non subventionné peut être pensé dans cette logique. On peut localiser les lignes, arrêts, fréquences, dépôts de véhicules afin qu'ils servent au mieux la majorité des habitants.

A l'opposé, la logique d'équité prône le respect des droits de chacun en toute impartialité. Les individus sont davantage considérés, les enjeux plus généraux passant au second plan. Dans cette logique, on peut être amené à compenser certains

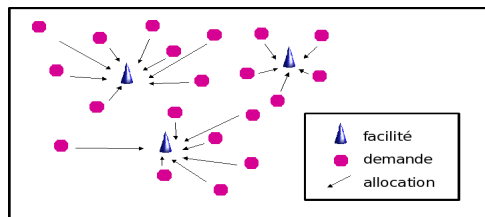
handicaps pour rééquilibrer l'accès aux ressources. Par exemple, une ville décidera de développer un transport spécifique coûteux pour les personnes à mobilité réduite à destination des centres de soin ou de secours.

La norme  $L_2$ , quant à elle, est censée représenter un objectif d'égalité. Dans l'exemple du transport que nous développons, il pourrait s'agir de proposer un service strictement équivalent pour l'ensemble des habitants d'une agglomération, avec, par exemple, un prix calculé en fonction de la distance parcourue par le client. On pressent la position intermédiaire d'une telle norme, entre équité et efficacité.

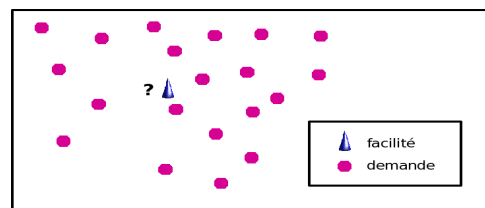
### 3. Définition du problème d'allocation de 1-facilité en fonction des normes $L_p$

Notre recherche se situe dans le domaine de l'optimisation spatiale, soit le problème des  $P$ -facilités<sup>3</sup> et poursuivre par une analyse des poids des individus sur la détermination des valeurs centrales minimisant les normes  $L_p$ .

#### 3.1. Allocation de $P$ -facilités à un ensemble de points de demande



**Figure 4.** Allocation de plusieurs demandes à  $P$  facilités



**Figure 5.** Allocation de plusieurs demandes à 1 facilité

<sup>3</sup>nous indiquerons un grand  $P$  pour indiquer le niveau de complexité du problème d'allocation de  $P$ -facilités et pour le différencier du petit  $p$  de la norme  $L_p$

Le problème qui nous préoccupe est un sous-problème de P-localisation-allocation (Hakimi, 1964). On trouve souvent dans la littérature la  $P$ -médiane (Church & Sorensen, 1994) et le  $P$ -centre (Mladenović *et al.*, 2001). Affecter  $N$  individus à  $P$  facilités (figure 4) peut consister à :

- rechercher pour chaque individu, la ressource qui, parmi un ensemble de ressources géographiquement pré-positionnées, sert le mieux chaque individu;
- à positionner au mieux dans un espace continu la (ou les) ressources.

Notre objectif mixe les deux approches, puisqu'il s'agit de positionner un unique point de facilité, le « centre », dans un espace continu (figure 5). En cela, notre problème est relativement simple, puisque tous les points sont assignés à une unique facilité, mais délicat à traiter, puisque nous travaillons dans un espace continu. Nous le décrivons comme un problème de localisation de  $I$ -facilité (Josselin, 2006). Nous verrons que nous identifions ainsi la  $I$ -médiane et le  $I$ -centre. Autrement dit, nous cherchons à trouver le point central qui « représente » l'ensemble des points de demande dans l'espace géographique, compte tenu d'un objectif donné. Se pose alors la question de la distance à considérer pour identifier la localisation de ce centre.

### 3.2. Discussion autour des poids des individus sur la détermination des valeurs centrales minimisant les normes $L_p$

Analysons le poids des différents points selon leur position par rapport à la valeur centrale. Les figures 6, 7 et 8 présentent ces éléments pour les normes  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_\infty$ .

On voit par exemple que la moyenne est sensible à tous les individus de la série, quelle que soit leur valeur, même si le carré appliqué aux résidus confère un poids plus important aux individus éloignés (figure 6). Ainsi, dès le premier point bougé, la valeur de la moyenne est affectée : la moyenne a un point d'effondrement nul (« breakdown point », Hampel *et al.*, 1986). Notons que cet indicateur est souvent utilisé pour caractériser la robustesse d'une méthode statistique.

Cette propriété questionne sur la qualité « égalitaire » généralement associée à la norme  $L_2$  dans les transports ou les problèmes de localisation optimale, même si effectivement chaque individu a sa propre influence, même minime, sur la valeur centrale. Il est en effet possible de considérer le poids des individus sous deux angles différents. D'un côté, si l'on analyse les points indépendamment de leur distance à la valeur centrale, la moyenne, par son mode de calcul, considère chaque point de manière équivalente en fonction de sa valeur. D'un autre côté, du fait de la formalisation de la norme  $L_2$  (minimisation de la somme des carrés des écarts), la distance euclidienne accroît l'impact des points les plus éloignés. On peut alors proposer deux méthodes pour éviter cet écueil : (i) pondérer l'impact de chaque point par l'inverse de sa distance, définissant ainsi un « centre pondéré », (ii) utiliser la norme  $L_1$ , en supprimant le carré des écarts.



Le cas de la norme  $L_1$  est différent puisque, pour le cas d'une distribution d'effectif impair, l'individu du milieu détermine à lui seul la position de la médiane (figure 7). Dans le cas d'un nombre pair d'individus, la médiane se situe de ce fait exactement à égale distance des deux individus les plus centraux. Ainsi, dans l'intervalle défini par les deux individus directement inférieur et supérieur, la valeur de la médiane est imposée par 1 ou 2 individus « dominants ». On peut également dire que l'on peut bouger jusqu'à un peu moins de la moitié des points d'une distribution (du même côté de celle-ci et en paquet) sans que cela n'affecte la position de la médiane (d'où un point d'effondrement proche de 50%). C'est pourquoi la norme  $L_1$  est souvent considérée comme plus robuste que la norme  $L_2$ . Généralement associée à un objectif d'efficacité dans le cas de la recherche du centre géographique optimal, elle réduit l'effet des individus éloignés.

La norme  $L_\infty$  possède un comportement diamétralement opposé à la norme  $L_1$ . En effet, ce sont cette fois-ci les deux points les plus extrêmes de la distribution (figure 8) qui règnent sans partage sur la localisation de la valeur centrale minimisant cette norme. On pourrait ainsi déplacer tous les individus (sauf les deux extrêmes et strictement dans l'intervalle qu'ils forment) sans que cela n'affecte la valeur centrale. Pour des grands ensembles de données, le point de rupture tend ainsi vers 100%. Cette norme est qualifiée d'équitable dans les problèmes de  $P$ -localisation-allocation. De fait, on voit immédiatement l'impact des points les plus éloignés sur la localisation de la valeur centrale, réduisant d'autant celui des points intermédiaires (qui, malgré tout, ne seront pas tant éloignés que cela de la valeur centrale, puisque cette dernière ne peut sortir de l'intervalle défini par les valeurs extrêmes). Tout comme l'égalité, la notion d'équité reste ici discutable.

Nous allons maintenant aborder le problème dans deux dimensions, ce qui ajoute une complexité supplémentaire et duplique l'impact du choix de la norme, au niveau:

- de la distance estimant les écarts des points au centre;
- de la façon de combiner ces distances pour un objectif de minimisation.

#### **4. Centres géographiques courants et normes qu'ils minimisent**

##### **4.1. La norme dans la fonction d'objectif**

Quand on cherche à minimiser une fonction ou un processus multi-critères, on manipule un ensemble de facteurs ou d'individus. Dans notre cas, nous disposons d'une seule variable, qui mesure l'écart de chaque point de demande au centre. Le centre doit représenter *in fine* un ensemble de points de demande et minimiser une distance globale. Se pose alors la question de la combinaison des distances mesurées.

A nouveau, la norme intervient. Prenons l'exemple de la distance de Manhattan. On peut rechercher le centre des points de demande d'au moins trois manières

différentes. En appliquant la norme  $L_1$ , on va minimiser la somme des distances de Manhattan absolues pour l'ensemble des points. Avec la norme  $L_2$ , on minimise la somme des carrés des distances de Manhattan. En prenant la norme  $L_\infty$ , on minimise le maximum des distances de Manhattan.

Cette méthode peut s'appliquer indifféremment aux trois distances modélisant (i) la distance de Manhattan, (ii) la distance euclidienne et (iii) la distance des points extrêmes. Cela nous offre donc (au moins, sans considérer les normes combinées, Josselin & Ladiray, 2002) 9 façons différentes de déterminer le centre en croisant les normes au niveau des distances considérées et de la fonction d'objectif (cf figure 9).

	+ «efficace» <i>Norme de la distance <math>L_p</math></i> + «équitable» Pour un point $k$ dans $N$ dimensions : $\mathbf{D}_k = \text{Min}\{\sum_{i \in N}  Z_i ^p\}^{1/p}$			
Pour un ensemble $L$ de points $k$ $\text{Min}\{\sum_{k \in L} (\mathbf{D}_k)^p\}^{1/p}$ + «efficace» <i>Norme de la fonction d'objectif sur <math>L</math></i> + «équitable»	$p =$	<b>1</b> $\text{Min}\{\sum_{i \in N}  Z_i \}$	<b>2</b> $\text{Min}\{\sum_{i \in N}  Z_i ^2\}^{1/2}$	$\infty$ $\text{Min}\{\text{Max}_{i \in N}  Z_i \}$
	<b>1</b> $\text{Min}\{\sum_{k \in L} (\mathbf{D}_k)\}$	Centre médian (s. s.)	$l$ -médiane	
	<b>2</b> $\text{Min}\{\sum_{k \in L} (\mathbf{D}_k)^2\}^{1/2}$		Centre de gravité = barycentre = centroïde	
	$\infty$ $\text{Min}\{\text{Max}_{k \in L} (\mathbf{D}_k)\}$		$l$ -centre	Centre des points extrêmes

**Figure 9.** Position et construction de plusieurs centres géométriques en fonction des normes de distance et d'objectif.

L'utilisation des trois valeurs possibles de  $p$  des normes  $L_p$  ne confère pas forcément au centre la possibilité d'être trouvé exactement. Certains centres doivent être estimés par algorithmes. Nous allons distinguer parmi les différents exemples de centres présentés dans la figure 9, ceux qui sont exacts de ceux qui sont approximatés.

#### 4.2. Centres exacts

Trois centres exacts peuvent être calculés de façon très simple et paramétrique à partir des coordonnées des points de demande. Il s'agit :

- du **centre médian** strict (différent de la  $P$ -médiane); il est déterminé en appliquant la médiane des coordonnées en X et des valeurs en Y; il correspond à la minimisation des normes  $L_1$  de la distance (on considère la distance de Manhattan) et de la fonction d'objectif (on minimise la somme des valeurs des distances). On peut qualifier cette combinaison de normes comme  $L^4_{11}$ .
- du centre moyen, ou **barycentre**, ou centre de gravité, ou centroïde ( $L_{22}$ ); de façon similaire, on calcule la moyenne des valeurs en X et Y; ce centre minimise les normes  $L_2$  de la distance (Euclidienne, cette fois-ci) et de la fonction d'objectif (à la racine près).
- du **centre des points extrêmes**, appelé ainsi pour les propriétés évoquées précédemment ( $L_{\infty}$ ); il est localisé par l'opérateur MinMax sur les coordonnées des points en X et Y; d'après nos calculs (comparaison entre les résultats du MinMax et l'application de l'algorithme d'optimisation expliqué dans le paragraphe suivant), il correspond bien à la minimisation des normes  $L_{\infty}$  des distances ( $p=\infty$ ) et de la fonction d'objectif (parmi les distances de chaque point, le centre minimise la distance maximale observée).

Notons que ces 3 centres forment la diagonale de notre tableau et associent systématiquement la même philosophie et la même norme appliquée, pour la distance et la fonction d'objectif (efficacité pour la norme  $L_1$ , notion d'« égalité » pour la norme  $L_2$  et équité pour la norme  $L_{\infty}$ ).

### 4.3. Centres à approximer et algorithmes associés

La combinaison de normes différentes, selon que l'on considère la distance retenue ou l'objectif fixé, implique parfois, notamment pour les centres du problème de  $I$ -localisation qui nous occupent, le recours à un algorithme d'optimisation. C'est le cas pour la  $I$ -médiane et le  $I$ -centre. Ces deux centres s'appliquent sur la distance Euclidienne. En revanche, ils manipulent cette distance de façon très différente, puisque la  $I$ -médiane (point de Fermat) minimise la somme des distances (norme  $L_1$ ), alors que le  $I$ -centre leur applique le MinMax (norme  $L_{\infty}$ ).

Pour ces différents centres, nous utilisons une méthode classique de descente de gradient pour trouver l'unique minimum de la surface convexe. L'algorithme fonctionne en trois étapes (figure 10) :

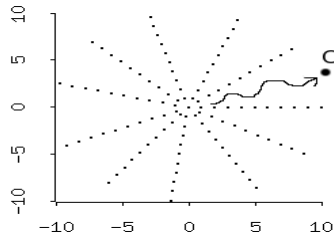
- *initialisation* : nous calculons le centre de gravité des trois centres exacts (centre médian *s.s.*, barycentre, centre des points extrêmes); cette première approche nous permet de nous situer dans une zone probable de localisation des

---

<sup>4</sup> La première valeur  $p$  de la norme  $L_{pp}$  correspond à la distance, la seconde à la fonction minimisant la distance en question; par exemple,  $L_{22}$  correspond au barycentre, minimisant la somme des carrés des distances euclidiennes.

centres (souvent relativement proches les uns des autres) et d'augmenter la vitesse de convergence vers le centre en question;

- *itérations pour la recherche du centre* : nous déplaçons l'étoile de la figure 10 sur le point qui minimise la norme recherchée en fonction de la distance considérée; cette étoile explore un ensemble fini de points à tester et se repositionne en son centre sur le point minimisant la norme; pratiquement, le nombre de points est paramétrable par le nombre de rayons de l'étoile et le nombre de points disposés sur chaque rayon; leur augmentation ralentit le processus de recherche, qui reste malgré tous de l'ordre de la seconde;
- *fixation du centre* : après un nombre d'itérations maximale ou l'obtention d'un mouvement très réduit de l'étoile (correspondant à la plus petite distance séparant les points candidats de l'étoile), on arrête le processus : le centre est approximé.

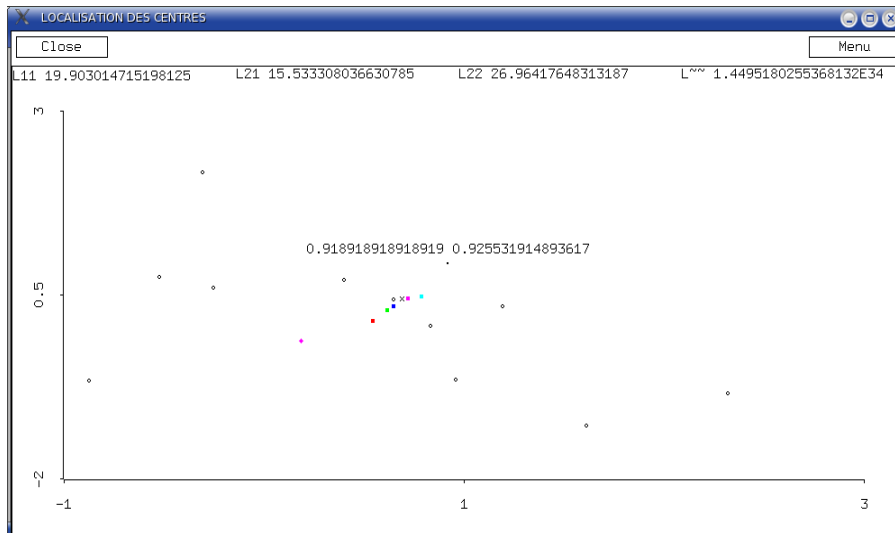


**Figure 10.** Etoile pour l'approximation du centre : elle se déplace vers le centre  $C$  en suivant la descente de gradient ; ses points candidats, positionnés sur ses rayons, permettent de tester les normes et de converger vers le centre.

L'algorithme proposé peut être validé de deux façons. D'une part, nous avons développé, dans l'environnement statistique LispStat (Tierney, 1990), une méthode exploratoire illustrée par la figure 12. En déplaçant un point test dans une fenêtre et en le rapprochant plus ou moins des centres, nous calculons différentes normes interactivement et pouvons vérifier que les centres que nous avons déterminés minimisent telle ou telle norme (par exemple, dans le fenêtre,  $L_{22}$  correspond à la norme du barycentre,  $L_{21}$  à celle de la  $I$ -médiane,  $L_{\infty}$  à celle du centre des points extrêmes). Par ailleurs, le tableau de la figure 11 confirme numériquement, sur un exemple, la bonne adéquation entre les estimations de l'algorithme et les localisations des 3 centres exacts. A noter que notre application graphique permet également d'afficher dynamiquement les différents centres et constater la bonne correspondance des localisations exactes et estimées, quelques que soient les configurations spatiales de points de demande. De légers écarts sont toutefois notables en présence de points éloignés et avec la norme  $L_{\infty}$  (cette norme étant structurellement approximée).

	Centre médian $p=1$	Barycentre $p=2$	Centre des points extrêmes ( $p=100$ )	$l$ -médiane	$l$ -centre
Valeur exacte	X = <b>0.6496907171</b> Y = <b>0.3472882715</b>	X = <b>0.5485172901</b> Y = <b>0.1518809340</b>	X = <b>0.7248457709</b> Y = <b>0.4488335932</b>	sans objet	sans objet
Valeur approximée	X = <b>0.6496425542</b> Y = <b>0.3472609252</b>	X = <b>0.5484658597</b> Y = <b>0.1522507252</b>	X = <b>0.7246773554</b> Y = <b>0.4488338724</b>	X = 0.6197867569 Y = 0.2906436127	X = 0.7922110139 Y = 0.4738801044

**Figure 11.** Exemples de coordonnées de centres exacts et approximés par l'algorithme selon les centres (les parties des coordonnées en caractère gras sont exactes). Les  $l$ -médiane et  $l$ -centre sont estimés avec une étoile à 100 rayons, 100 points par rayon et 10000 itérations maximales.



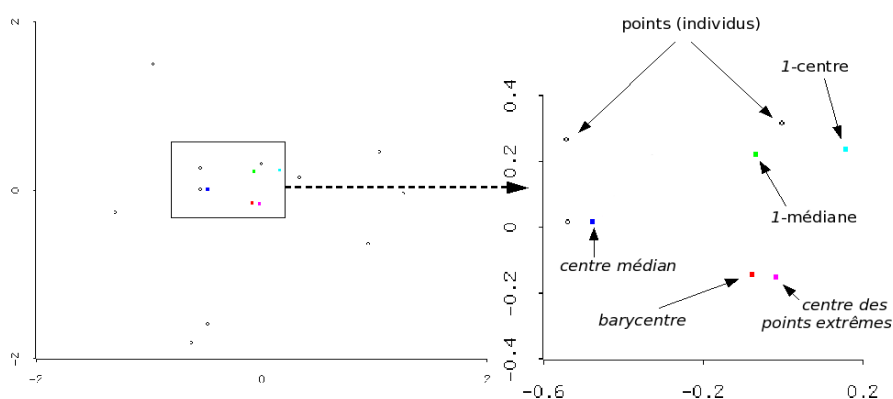
**Figure 12.** Analyse exploratoire des centres : en déplaçant le petit point noir (sous les coordonnées au centre), les valeurs des normes calculés s'affichent dynamiquement, ainsi que les coordonnées de ce point, permettant de vérifier quel centre minimise quelle norme. Les points ronds correspondent à 11 individus, les autres points (croix, carrés, losanges) constituent différents centres. Une autre fonctionnalité de l'environnement développé permet de déplacer les points de demande afin d'évaluer dynamiquement l'impact sur la localisation des centres.

Une autre caractéristique de l'outil exploratoire développé est que nous pouvons construire des nuages de points typiques, en déplaçant les points avec la souris (figure 12). Cela nous permet d'observer la localisation des centres en fonction de configurations spatiales typiques de la demande.

#### 4. Analyse des centres géographiques théoriques

L'exercice consiste à construire plusieurs exemples typiques et observer la localisation des centres que la topologie des points a induite. Nous en avons choisis 4 particulièrement démonstratifs.

##### 4.1. Cas d'une répartition aléatoire non typique



**Figure 13.** Répartition aléatoire de la demande, non typique

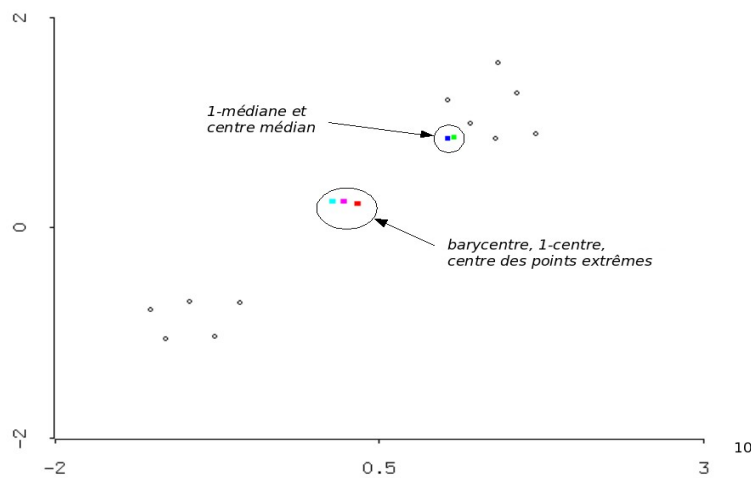
Le premier exemple a été généré aléatoirement. Il n'y a pas de loi de distribution spatiale particulière (figure 13). On constate déjà une certaine disparité des centres, dont l'éloignement les uns des autres peut-être relativement important. Sur ce cas particulier, le barycentre est proche du centre des points extrêmes. Une première conclusion est de constater des différences de localisation importantes selon les normes minimisées.

##### 4.2. Cas de deux groupes de points

Nous avons disposé dans le plan deux groupes de points séparés dans l'espace, l'un comprenant 5 individus, l'autre 6 (figure 14). Ce déséquilibre induit deux groupes distincts de centres. Vers le milieu des deux paquets de points, on retrouve le barycentre, le 1-centre et le centre des points extrêmes. Ces centres sont en effet sensibles aux points extrêmes, à plus ou moins forts degrés, comme nous l'avons montré. Ils se situent tous dans une zone sans aucun point de demande et identifient une localisation qui, dans l'absolu, ne satisfait réellement aucun individu. Dans ce cas de figure particulier, les logiques d'égalité et d'équité se rejoignent plus ou moins.

Plus robustes, le centre médian et la 1-médiane se situent proche du groupe de points dominants, de par l'impact de l'unique individu supplémentaire du groupe situé au Nord-Est. A noter que dans ce cas de figure, il semblerait que ce soit deux points différents qui aient déterminé les coordonnées de ces centres. En effet, on

raisonne sur des vecteurs de coordonnées indépendants en X et en Y pour le centre médian. En revanche, le mode de calcul est plus complexe pour la  $l$ -médiane, approximée par algorithme, qui, malgré tout, se retrouve proche du point médian dans cette configuration. L'objectif d'efficacité se traduit en définitive par une forte discrimination spatiale entre les individus, puisque près de la moitié des individus est, d'une certaine façon, ignorée.



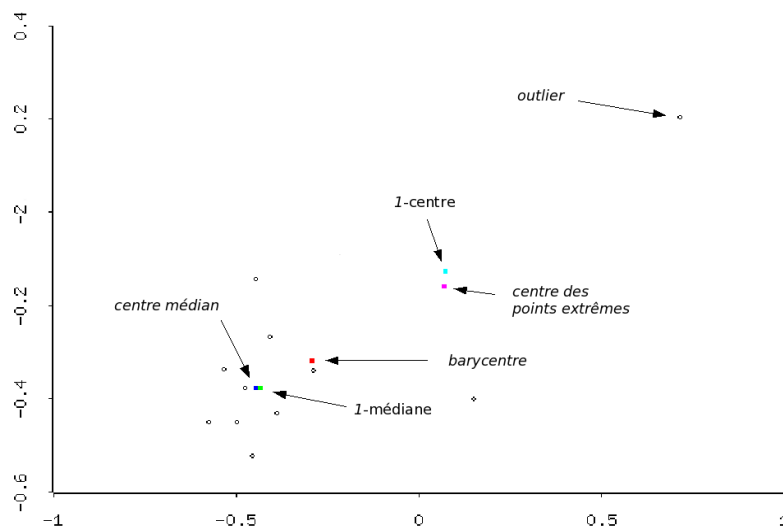
**Figure 14.** Localisation des centres en fonction de la répartition de la demande en deux paquets de points, distincts et à effectifs non égaux.

### 4.3. Présence d'un outlier

A nouveau, le centre médian et la  $l$ -médiane se trouvent à proximité l'un de l'autre, car peu sensibles à l'outlier. Cette sensibilité se constate en revanche logiquement sur le  $l$ -centre et sur le centre des points extrêmes, indiquant que l'outlier a eu un impact important sur les centres reposant sur les normes  $L_2$  et  $L_\infty$ . Aussi, le barycentre a été partiellement influencé par l'outlier et par les deux autres points en périphérie.

Même si le centre des points extrêmes présente un point d'effondrement de près de 100%, indiquant une forme de grande robustesse, on constate sur ce cas concret que cette propriété peut être remise en question, compte tenu de l'extrême importance de l'outlier dans la localisation du centre. Toutefois, constatons par ailleurs que cette propriété est dans la droite ligne de l'équité, au moins d'un point de vue théorique.

Dans le cas de répartition spatiale illustrée par la figure 15, les logiques d'efficacité et d'égalité se rapprochent plus ou moins, alors que les centres représentant l'équité se trouvent davantage éloignés des autres centres. En comparaison aux graphiques précédents, il semble évident que la topologie des points doit être étudiée en détails avant de pouvoir déclarer qu'effectivement le centre choisi est cohérent avec l'objectif fixé. Le choix de la localisation devrait se faire à partir d'un ensemble de scénarios objectivés et également de la topologie des centres eux-mêmes dans l'espace, afin d'améliorer l'aide à la décision.



**Figure 15.** Localisation des centres en présence d'un outlier loin du paquet de points.

## 6. Conclusion

Revenons sur les centres définis dans l'exemple concret des villes du Sud de la France. Équitables, le  $I$ -centre (centre 4) et le centre des points extrêmes (centre 5) demeurent insensibles à la pondération des villes par leur population, et restent situés en pleine mer Méditerranée. En revanche, le poids démesuré de Marseille a déclenché la fusion en sa propre localisation des centres « efficaces » 1 et 2 (centre médian,  $I$ -médiane). Le barycentre (centre 3) a subi également un tropisme positif en destination de Marseille mais moins important que les centres associées à la norme  $L_1$ . La présence des quatre ville corses, peu peuplées comparativement aux villes des Bouches du Rhône, par la propriété statistique du point d'effondrement nul, a contribué à localiser le centre moyen non pas dans, mais près de Marseille. Même développé dans un espace géométrique continu et isotrope, sans considérations

géographiques ni territoriales, cet exemple montre bien l'importance du choix des normes sur les centres et sa prise en considération dans les décisions d'aménagement. Cela présage des résultats intéressants par la prise en compte de la robustesse des méthodes appliquées sur la localisation de centres, cette fois-ci géographiques (distances réseau, anisotropie de l'espace, etc.).

Nous avons également tenté de clarifier la position par rapport à ces normes, des différents centres géométriques exacts (tel que le barycentre) et des centres non estimés issus du domaine de la  $P$ -localisation-allocation ( $I$ -centre et  $I$ -médiane). Nous avons analysé l'impact des normes sur les centres selon leur niveau d'intervention et discuté le sens théorique attribué aux centres induits (efficacité, égalité, équité). Nous avons aussi montré l'intérêt de l'analyse exploratoire pour explorer différentes solutions et valider un algorithme de détermination du centre optimal associé à des normes. Enfin, le tableau de synthèse croisant les normes permet d'identifier facilement aujourd'hui la position de chaque centre en fonction de ces deux critères.

Pour passer d'une logique géométrique trop simplificatrice à une approche d'aide à la décision territoriale, il convient de continuer les recherches. D'une part, les logiques d'efficacité, d'égalité ou d'équité, souvent associées aux centres, semblent parfois peu appropriées, car peu soucieuses de l'organisation spatiale et topologique des points de demande. Il conviendrait de discuter plus avant ces notions et leur pertinence sur un ensemble de configurations spatiales théoriques et réelles. Quelle égalité peut-on réellement concevoir en utilisant le barycentre, compte tenu de son mode de calcul ? Quelle robustesse revêt le centre médian ou la  $I$ -médiane lorsque deux villes de taille équivalente s'associent pour positionner un centre de traitement des déchets, qui sera finalement localisé quelque peu arbitrairement dans une des villes, uniquement à cause d'une poignée d'individus supplémentaires ? Toutes ces questions méritent qu'on se penche sur des approches alternatives de détermination du centre optimal, basée non plus sur un choix *a priori* de l'objectif de localisation, mais sur une recherche du centre spatialement le plus robuste dans le temps, le plus durable.

## 8. Références

- Andrew DF, Bickel PJ, Hampel FR, Huber PJ, Rogers WH, Tukey JW, Robust estimates of location, Princeton University Press, NJ, 1972.
- Beguïn H., Efficacité et équité en aménagement du territoire, *L'Espace Géographique*, n° 4, pp. 335-336, 1989.
- Church R. L., Sorensen P., Integrating Normative Location Models into GIS: Problems and Prospects with the  $p$ -median Model, NCGIA, Technical report, June 1994.

- Feldman J., Lagneau G., Matalon B. (Eds.), *Moyenne, milieu, centre. Histoires et usages*. EHESS, Paris. 1991.
- Hakimi, S.L. Optimum Locations of Switching Center and the absolute Center and Medians of a Graph. *Operations Research*, 12, 450-459, 1964.
- Hampel F., Ronchetti E., Rousseeuw P., Stahel W. *Robust Statistics: The approach based on influence functions*, Wiley, New York, 1986.
- Hoaglin C., Mosteller F., Tukey J.W., *Understanding Robust and Exploratory Data Analysis*, Wiley & Sons, 1983.
- Josselin D., Ladiray D., Combining  $L_1$  and  $L_2$  Norms, for a more Robust Spatial Analysis : the "Median Attitude", *Cybergeo*, n°222, 14 pages, 2002.
- Josselin D., Recherche du centre d'un ensemble de points. De la p-médiane à la localisation médienne, Actes du colloque SAGEO'2006, 11-13 septembre 2006, Strasbourg.
- Labbé, M., Peeters D & Thisse J.F. *Location on networks*. Handbook of Operations Research and Management Science: Networks (Ball, Magnanti, Monma and Nemhauser, eds.), North Holland, Amsterdam, 1995.
- Mladenović N, Labbé M, Hansen P. Solving the  $p$ -center problem with tabu search and variable neighborhood search. *Les Cahiers du GERAD*, G-2000-35, 2001.
- Peeters D., Thomas I., Distance-Lp et localisations optimales. Simulations sur un semis aléatoire de points, *Les cahiers scientifiques du transport*, n°31, pp. 55-70, 1997.
- Peeters D., Thomas I., Distance predicting function and applied location-allocation models, *Geographical Systems*, n°2, pp. 167-184, 2000.
- Tierney L., *Lisp-Stat, an object oriented environment for statistical computing and dynamic graphics*, New York, Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons, 1990.